计数

刘小川

February 1, 2012

“有谁不是从数数开始的？”

（建议于2月7日之前完成。

教材：Richard Stanley的书“组合计数学”第二版，作者的主页上可以下载，点击倒数第二段中的here,就可以了：

$http://www-math.mit.edu/ rstan/ec/ec1/$）

1 斐波那契数列

斐波那契数列的定义是，$f_1 = f_2 = 1$,$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$.使用斐波那契数列来表达下面的数。

1. 集合$[n]$表示$\{1, 2, \cdots, n\}$.使用斐波那契数列，表达$[n]$的所有的满足不包含连续的两个数的子集的个数.

2. 一个含有n个元素的$0-1$序列是所有只包含0或者1的数列，表示为$(a_1, \cdots, a_n)$.我们要求它满足条件$a_1 \leq a_2 \geq a_2 \cdots$.使用斐波那契数列，表达满足上述条件的0-1序列的个数.

3. 数列$(a_1, \cdots, a_n)$,每一个元素只能是$0, 1$或者2,并且满足条件0总也不会跟在1的后面，使用斐波那契数列，表达这样的数列的个数.

4*.对于确定好的k, n,集合列$T_1, \cdots, T_k$中每一个都是$[n]$的子集，且满足$T_1 \subseteq T_2 \supseteq T_3 \cdots$.使用斐波那契数列，表达这样的集合列的个数。提示：先表达这样的集合列的个数为$f(n, k)$,考虑每一个$[n]$中的元素i是否在$T_1, \cdots, T_k$当中。

5. 证明$f_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{0}{n}$,其中，$f_n$指的是第$n$个斐波那契数。而$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$表示$n$取$k$的组合数。注意，当$n < k$的时候，$\binom{n}{k}$是零。

6. (S, T)是一对儿集合$[n]$的子集，要求满足，$s > |T|$以及$t > |S|$.其中，我们用$|T|$表示T这个集合中元素的个数。使用斐波那契数列，表达这样的集合对儿的个数.

2 阅读

1. Matrix67的最新帖子：“Fibonacci数列性质的组合证明”网址：

$http://www.matrix67.com/blog/archives/4891$

2. 有条件的，阅读教材23页，24页，以及25页的一半。

3 扩展

1. 斐波那契数列提供了三项递归的一个典型例子。从$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$想求出它的通项公式，需要借助2元一次方程的帮助。事实上，$x^2 = x + 1$这个方程，它和数列的递归公式有关系，注意f_n与x^2,f_{n-1}与x，还有f_{n-2}与1的对应关系。方程的两个解如下,$x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$,$x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 于是，我们可以把方程写成$(x - x_1)(x - x_2) = 0$,或者，$x^2 - x_1 x = x_2(x - x_1)$,从而按照一开始的对应关系，得出$f_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2} f_{n-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(f_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2} f_{n-1})$. 如果将$g_n$定义成$f_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2} f_{n-1}$,则化简为两项递归，请由此计算出通项公式，

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$

2. 在概率论中，有一种研究对象叫做随机行走(random walk)，是非常重要的。其中有一种斐波那契行走，是说，在所有整数点上，一个行者，从1这个点出发，他以$\frac{1}{2}$的概率向左走一步，或者，以$\frac{1}{2}$的概率向右走两步。那么我们想知道他可以到达原点的概率是多少。这个概率p的值其实是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.其实这正是这种行走被称作斐波那契行走的原因。而它的证明，只需要前面很类似的关于递归的分析，和关于生成函数的知识。以后(学习生成函数之后) 我会将此留作习题。

继续计数

刘小川

February 5, 2012

（笑话）三个人在西班牙林间散步。A:“瞧，那里有一只羊。那是一只黑色的羊。”B:“原来西班牙有黑羊。”C:“你们都错了，起码不准确，通过观察我们仅仅知道，在西班牙，至少有一只羊，它的一个侧面是黑色的。”第三个人，正如你们猜得到的，是一位数学家。

（本材料建议于2月14日之前完成。）

1 数学常识● 悖论

今天打算废话几句，可能是说废话最多的一次。有不少人问我数学是什么。我在大家学习的初期，说一点我自己这方面的看法。更多这方面的文章在很多地方都可以找到。华罗庚就写过不少。

问题1. 求和式$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$的极限，

方法1，$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{n^2}{2n^2}+\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\to\frac{1}{2}$.

方法2，观察$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$,发现每一项当$n$趋近于零的时候，它们的值都趋近于零。所以整体就是$0+0+...+0$，结论是0.

问题2. π的值等于4，具体见附的图。

问题3. 罗素悖论.设集合M，或称罗素集合，为这样一个集合，首先，它的元素都是集合。其次，一个集合A是M的元素当且仅当A不包含它自己，即，$A\notin A$。那么请问M是否包含它自己。如果它包含自己，那么$M\in M$，则按照定义，$M\notin M$;如果$M\notin M$，则按照定义，$M\in M$.

以上三个问题都不是可以一两句话便简单解决的问题，试图真正理解它们产生的原因，是学数学初期的一个最重要的目的。真正理解他们之后，才能对数学到底是个什么东西有一个初步了解，于是，才有资格谈论自己是不是喜欢数学。对前两个问题，等完成数学分析1的学习之后便可以搞懂。对第三个问题，则需要对集合论有所了解。

经常会有人对数学产生各种各样的误解，一个熟人问过我，做数学是不是每天按照别人给你的公公式算来算去呀？我很好奇“别人”是谁，难道是上帝?动动脑子就知道没有所谓的“别人”。还有一些人十分确定的说，陈景润一辈子在证明1+1=2,“然后呢？”“自然是傻掉了。”他们回答。

对这两类无知，恐怕解释都无从解释。但是多数人对数学的误解还是可以解释清楚的。数学首先是一个“精确”的学问，它不允许有任何的“大约”出现。其次，它是一门以简洁为美的学问。第三，数学是一个积累起来的学问，每个人必须站在前面的巨人肩膀上，才有可能知道现在的前沿是个怎么回事儿。

不接受这些会有很多不良后果。我分别说一说。

首先是谈严格。很多人在面对高等数学的时候，第一道坎儿就是严格精确的叙述。一开始可能不好体会那么严格意义在何处。在中学已经习惯给几个定义，讲几个定理，就开始做练习了，这样的习惯越深，数学分析越不好学。其实我感觉到我大学同学有一部分是到最后也没学懂这个大一第一门课程的。

这里有一种不太好描述的我称之为“数学素养”的东西。给大家讲一个故事看看大家是什么看

法。我在南开大学曾经去旁听一门化学课程。那位化学老师在课上提到一道数学题目。这道题如下。

在一个球面上任意放四个点，那么这四个点可以在一个半球面内的概率是多少？（注：这个问题的解决也需要微积分，可以说微积分是现在一切的起点，是必须掌握的学科。如果我还记得的话，会在数学分析学完之后，领着各位回过头来做做这道题目。）

这位化学教授说，做数学的真是无聊，用那么复杂的方法算这东西。这我们化学就实用多了，只要用计算机模拟一下，写个程序，实验它几十万次，然后一除，不就算出来了么？

对这样的言论，读者有怎样的反应，应该是可以测试出我所谓的“数学素养”.事实上，数学的严格就在于此了，上面球面上点的问题的确切的答案我忘记了，但是表达式当中有π.而这位化学教授哪怕是用计算机算几十亿次，他也不可能算出π来。

其次我要说简洁。前面的罗素悖论是个很好的例子，短短的几行字，第一次看到非得想一会儿才能明白（甚至有些人无论如何不明白）。大众对数学的一个误解是，为什么要发明那么多符号？故意捉弄外行么？相信我，如果能不用这些符号的话，早就舍掉不用了。数学是以简洁著称的。学数学的人，每天都在读这样的话，写这样的符号。它们构成了动辄几百页的一本本专著。数学有如此多的符号，使得行业外的人了解起这门学科是如此的困难。但是实际情况是，因为内容太多太艰深，这些符号都是无奈之举。也就是说，**再做简化，就出错了！**爱因斯坦说，要as simple as possible, but not simpler.就是在谈这个问题。

好的方面是，简洁是透露出一种美感的，对这种美感的体会常常与登山运动员类似，都是经历大量复杂的中间过程而走到某个“高峰”的时候才能感觉到的。而一旦感受过，就无法阻止再次前行，试图再次感受了。

第三就是积累。数学是严重依赖基础的。必须要对前人的工作踏踏实实的去学习。不存在凭空发明一个什么理论这样的事情。从来没有过，以后也不会有。历来所有的工作，哪怕历史出名的那些个天才，也都是在前人的基础上向前跨步的。不接受这个事实，会做最低级的事情。比如如今仍活跃在很多论坛中的“民间数学家”们，再比如，天天都有人宣称证明了哥德巴赫猜想，跑到中科院去找院士理论。还有一类人，人家已经早已证明或者早已理解过的东西，他们还在那儿浪费时间。比如尺规三等分角，或者解五次方程。（注：这两个问题都是不可解的。这些都可在学完另外一门课，抽象代数后理解。早在上世纪初，中国曾经有一个数学家，他写了一篇解五次方程的“方法”，居然发表了。陈省身后来听说这事儿觉得很鄙视。而当时还是个小孩子的华罗庚没有浪费这个机会，发表了一篇论文指出其错误，也因此引起了其他人的注意。）这两个都解决了几百年了，早已被严格证明是做不到的，可是一直到今天，仍然有人坚定的，一不看前人的工作，二自己耗费大量时间做这些不可能完成的任务。

这也是为什么数学书比较难读。因为它要求作者与读者有着基本的对话的平台。像对我一开始提出的几个悖论，没听过没想过的人，无论如何也不可能读懂微积分为基础以上的书。在这些书里，每一次提到对什么什么求极限的时候，读者只能模棱两可，然后再往前走一步便不知所云了。这就是所谓的积累。但是另一方面，有着阅读数学的经验的人，在读比他的知识量稍微高一点的书的时候，却是收获非常大的。尽管经常被某句话卡住，但是静下来思考有时候甚至可以解决自己的疑问，完全独立的补齐相应的差距。读别人的研究工作也是这种感觉，所以，数学的研究和数学的阅读，本应该是分不开的。

工科的数学书，所谓的“高等数学”教材，是急功近利的典型例子。我是指那些像微积分，线性代数，概率论这些课程，本着“能用就行”的态度写成的教科书。想学好这些课程及很难也很容易，难的是你需要背下来各种完全不懂的公式和概念；简单的是你不用去理解。任何人在这样的课程上考出高分，都是没有任何意义的，对数学不可能有一丁点的理解加深，相反，数学真正富有魅力的地方完全不能体会，于是此生再也不打算看数学书了。

2 巩固

Richard Stanley给MIT本科上过的一门课，我把其中一次作业题直接拿了过来。

1.做15题.

2.做16题.

3.做23题.

4.2011年国际奥林匹克竞赛，一共六个题目，做其中的第二题。（注意和前面15题的联系。）

5.如果仍有兴致，无妨挑战一下Stanley的24题。注意这道题目跟我下面的内容有些关系。

3 联系

很多数学的内容都咋一看非常接近，可是却千差万别。Perrin数，定义为前三项首先是$p_0 = 3, p_1 = 0, p_2 = 2$，然后，它的递归公式为$P_n = P_{n-2} + P_{n-1}$.它的递归跟斐波那契数列接近，区别是，它的每一项是相隔一项的前面两项之和。结果就完全变成了另外一个问题。

当一个正整数n整除p_n的时候，我们管这样的正整数当中不是素数的叫做perrin伪素数。这个名字的由来，是因为曾经Perrin这个数学家猜想，所有满足上面n整除p_n这个条件的数都是素数，因为他发现，素数都满足这个条件。对这个问题的研究，第一个突破是在1982年，Adams and Shanks [1]第一次举出了反例，$271441 = 521^2$; 最近，2010年，由Jon Grantham证明了 [2]，事实上，有无穷多个perrin伪素数。

4 阅读

1. 了解三次"数学危机"（到处可以搜到，比如百度）。

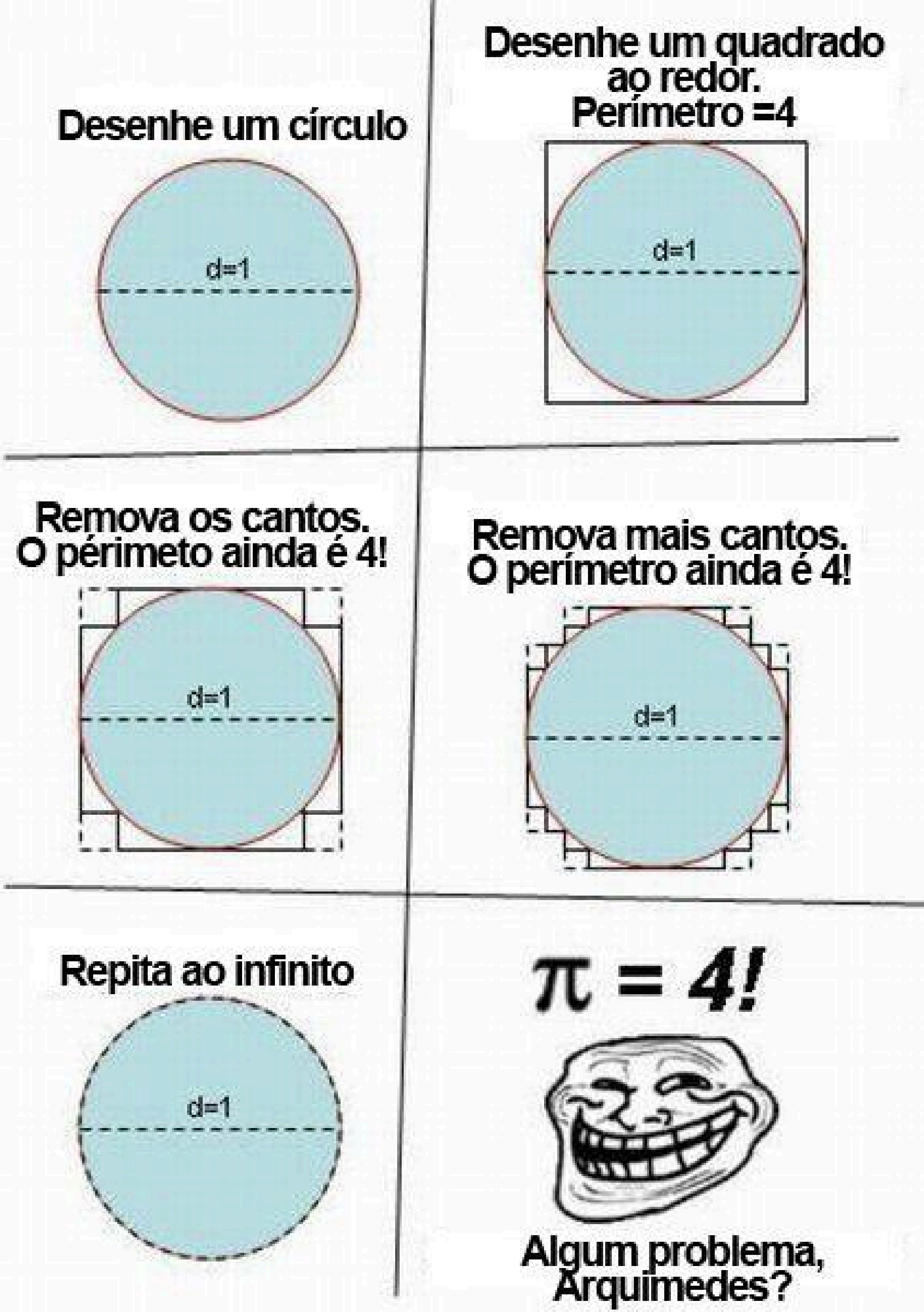
5 作业

这一周留一项作业：把罗素悖论看懂之后，找一个认识的人给他解释这个悖论。

References

[1] Adams, William; Shanks, Daniel (1982). "Strong primality tests that are not sufficient". Mathematics of Computation (American Mathematical Society) 39 (159): 255 - 300.

[2] Jon Grantham (2010). "There are infinitely many Perrin pseudoprimes". Journal of Number Theory 130 (5): 1117 - 1128.


Desenhe um círculo
d=1
Desenhe um quadrado ao redor.
Perímetro =4
d=1
Remova os cantos.
O périmeto ainda é 4!
d=1
Remova mais cantos.
O perímetro ainda é 4!
d=1
Repita ao infinito
d=1
π = 4!
Algum problema,
Arquimedes?

生成函数

刘小川 2012.2.13

The golden age of Mathematics,——that was not the age of Euclid, it is ours. ——Cassius Jackson Keyser (试译：数学的黄金时代，那可不是欧几里德的时代，而是我们的。)

（本材料的完成无时间限制。）

1 阅读

生成函数，是离散数学当中为数不多的比较系统的方法，它实在是太重要了，可以说是现代离散数学的基本语言。这次阅读的任务要重一些，要求大体把这本“发生函数论”第一章接近20页的书读完。好在这本有中文译本的书，难度比stanley的书低很多。这里需要对求和符号$\sum$使用的很熟悉，并且在阅读过程中，可以注意下面几个方面。

1. 由递归关系(1.1.1)所定义的数列在描述什么？

   答案：http://baike.baidu.com/view/191666.htm

2. 注意第7页的(1.2.2)式子，书中是用微分计算得到的。试图找到一种其他的证明方法，来证明这个式子。

3. 第一章第四节略去不用看。（这样的要求当然可以不必理会）

4. 难点是第五和第六节，可以有选择的阅读。注意，第五节中推导出递归关系的方法，是我们第一次关于斐波那契数列的诸问题的首选方法。18页底部，本书使用泰勒展开解决的组合数的求职，绝对是杀鸡用牛刀了。请自己寻找一个方法。

5. 第六节难度加大，请阅读到24页，并证明24页第一行中的问题.

2 练习

做课后习题第1，3，5，7四个题。注意11题我们已经做过了。

做12题，除了参考答案以外，想出12题的其他证明方法。

回忆Perrin数，前三项首先是$p_0 = 3, p_1 = 0, p_2 = 2$，递归公式为$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$. 求这个数列的生成函数。

生成函数

刘小川 2012.2.20

数学家中有的人对于各种领域和课题有强烈的价值判断，断言优劣，并毫无顾忌地贬低劣者。这样的数学家中有做出辉煌业绩者，也有无所成就者。——广中平佑

（本材料建议于2月29日之前完成。本次的末尾，我会做一些所谓的“价值判断”。）

1 幸运数字问题

据说，Stony Brook大学的Alexander Kirillov教授喜欢以下边这个例子做为他的课的开场白 [2]。一个客人需要买一张票，票上印有六位数字。一张票如果前三位数字之和等于后三位数字，我们就是这个数字书幸运的。

问题很简单：有多少幸运数字？（计数！）

三位数字之和，从$0(=0+0+0)$到$27(=9+9+9)$，可以有28个结果.如果使用a_n来表示和为n的三位数字的数量，那么，我们前几位是

$a_0=0$，只有(000)满足条件。

$a_1=3$, 我们有$(100),(010),(001)$.

$a_2=6$，我们有$(002)(020)(200)(011)(101)(110)$.

数幸运数字的数量，需要前三位与后三位的和相同。我们很容易看出，它就是

$$\sum_{i=0}^{27} a_i^2 = a_0^2+\cdots+a_{27}^2$$

为了求a_n,我们先分析一个数位是$0,1,\cdots,9$的生成函数，显然，这个生成函数是

$$A(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9$$

现在我们来考虑两位数目字之和是n的生成函数。我们宣称：$A(x)^2$中的x^n的系数，就是两位数字(a,b)，满足$a+b=n$的数量（想清楚这是为什么）。同理，我们有

$$a_0+a_1x^1+\cdots+a_{27}x^{27}=A(x)^3$$

2 斐波那契数列（回顾）

1. 回忆斐波那契行走，是指，在实数轴的整数点上，一个人从1这个点出发，他以$\frac{1}{2}$的概率向左走一步，或者，以$\frac{1}{2}$的概率向右走两步。我们利用生成函数求：他可以到达原点0的概率是多少。这个概率p的值其实是一系列数值的和。它可以分解为$p=p_1+p_2+\cdots$,其中p_i是这个人在行走第i步的时候第一次到达0的概率。

这个人行走了整i步，设其中有a_i条路径是在第i步正好第一次到达原点0.于是看出，$p_i=a_i(\frac{1}{2})^i$，如果我们写出上面a_n的生成函数$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$,则$p=A(\frac{1}{2})$. 为了求出$p$的值，我们需要对这个问题进行进一步分析。

我们令$a_n^{(m)}$为从整点m点出发（而不是1点），n次正好首次到达原点的路径数量。这样的话，我们容易得到递归公式$a_n^{(m+1)}=\sum_{k=0}^{n}a_ka_n^{(m)}$(为什么？)，而这个式子说明如果我们写$a_n^{(m)}$的生成函数为$A^{(m)}(x)\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(m)}x^n$的话，则有$A^{(m)}(x)=A(x)^m$.(对比上面的幸运数字问题)

下面我们仍需要一个递归关系。思考一个人从1点出发，他有两种选择，一种就是直接到达0点，另一种是到达3点。于是我们有

$$A(x) = \frac{1}{2} + xA(x)^3$$

于是

$$p^3 - 2p + 1 = 0 \Rightarrow (p-1)(p^2+p-1) = 0$$

解这个方程，唯一合适的解就是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,这其实是斐波那契行走这个名称的由来。

2.斐波那契数列的整除性质。

传统的数学教育，喜欢把所有的东西画在一个圈里。读者如果不涉猎更多的材料，容易错以为数学已经非常完善，什么都已经被前人做完了。剩下的都是很枯燥的记忆。但实际情况却是，我们知道的东西少之又少。比如，我们近期见到了很多关于Fibonacci数列的内容。一个很容易想到的问题是：是否Fibonacci数列当中包含无穷多个素数。到现在为止，这个历史悠久的问题还没有答案。

然而斐波那契数列是绝对与素数密切相关的。作为对这个经典数列的最后探讨，我们打算证明一个十分漂亮的有关斐波那契数列的结论，它的确让人惊叹 [1]。

回忆matrix67在帖子中提到的那个经典方法，把F_{n+1}看作是给一个长为n的板子上填充长为1或者2的瓷砖的方法数目。

Theorem 2.1 对于$m, n \geq 1$如果$m|n$则$F_m|F_n$，我们说，所有满足这样条件的数列叫做可除数列，而这个定理是说，斐波那契数列F_n是一个可除数列。

证明. 我们事实上要证明下面这个等式，当$n = mq$的时候，$F_n = F_m(\sum_{j=1}^{q} F_{m-1}^{j-1} F_{n-jm+1})$。对于给定的$n = mq$，我们观察$F_n$表达的是填充$n-1$这么长的板子的方法数目。我们把$n-1$暂且切成$(q-1)$个$m$长的板子，切口分别为$m, 2m, \cdots, (q-1)m$,最后剩下的部分长度是$m-1$。我们希望把整块板子按照刚才的那些位置分成两个板子分别计数。按照这个想法，却发现有时候做不到，是因为有可能那个切口处被一个长为2的瓷砖正好盖住。

于是，所有的填充可以分成q类，其中第$1, 2\cdots, q-1$类就是没有被盖住的最小的切口分别是$m, 2m, \cdots, (q-1)m$处. 而第q类表示所有切口通通被盖住了。注意第i类就相当于先给给一个$m-1$的板子和$i-1$个长为$m-2$板子同时填充，所以总方法数就是$F_m F_{m-1}^{i-1}$，再给剩下的长为$n-jm-2$的板子填充，即F_{n-jm+1}.给它们求和便得到了结论。 ∎

用同样的方法，先找一个切口，然后分类计数，我们可以证明下面的等式（留作练习）

Lemma 2.2 $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$

Theorem 2.3 如果我们表示n, m的最大公约数为$gcd(m, n)$，则F_n和F_m的最大公约数，等于$F_{gcd(m,n)}$，即，$gcd(F_m, F_n) = F_{gcd(m,n)}$.

证明. 无妨设$n > m$,则有$n = qm + r$,其中$0 \leq r < m$,则由上面的命题，$F_n = F_{qm+r} = F_{qm+1}F_r + F_{qm}F_{r-1}$,于是，

$$gcd(F_m, F_n) = gcd(F_m, F_{qm+1}F_r + F_{qm}F_{r-1})$$

我们已经知道$F_m|F_{qm}$，因此上式又等于$gcd(F_m, F_{qm+1}F_r)$.由于F_m与F_{qm+1}一定是互素的，我们又有

$$gcd(F_m, F_n) = gcd(F_m, F_r) \tag{2.1}$$

.

我们其实已经证明的定理，这里的逻辑比平时遇到过的证明要稍微复杂一点。注意，对于两个整数n和m,他们的最大公约数满足$gcd(m, n) = gcd(m, r_1)$.这个式子与(2.1)式子具有完全一样的形式。于是，我们继续分解$m = pr_1 + r_2$，其中$0 \leq r_2 < r_1$,从而得到$gcd(m, r) = gcd(r_1, r_2)$，就一定也有$gcd(F_m, F_r) = gcd(F_r, F_{r_2})$.由于一直这样下去，我们可以找到最终的$gcd(m, n) = gcd(\ell r, r) = r$. 于是，$gcd(F_n, R_n) = F_r$也一定成立，于是证明的了结论。 ∎

3 阅读

阅读stanley书的25页到28页。注意，permutation（置换）是非常非常重要的对象，在数学里到处都有它的身影。前次“发生函数论”第一章习题12题，可以在26页上面第一段中寻找到一个解法。

4 数学圈

http://arxiv.org/abs/1201.6656

Terence Tao是我们这个时代最卓越的数学家之一，他现在只有36岁，已经发表了超过230篇论文。今年的2月初，Tao刚刚投了一篇论文：“Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes”，（每一个大于1的奇数是至多5个素数之和）上面是论文的链接。

由于这个结论具有哥德巴赫猜想的味道，而且跟大多数他的更艰深的数学论文相比，结论起码可以被我们理解，所以我在这里提起一下。但是，他并没有把这篇文章投到顶级杂志上去。

说到所谓的顶级杂志，数学界很多人喜欢谈到“四大杂志”，这些全都是综合性质的杂志，不论哪个数学方向，只刊登最好的，对数学进展有巨大影响的论文。它们是Inventiones Mathematicae, Annals of Mathematics,　Acta Mathematica　以及　Jounal of AMS，其中又多认为以“数学年刊”(Annals of Mathematics)为最令人尊重的杂志。网上有一个帖子总结了中国到目前在这些杂志上发表论文的情况，

http://www.tianya.cn/publicforum/content/university/1/60205.shtml

当然，这仅仅是一个指标，并不能完全的评定一个人的工作。数学工作评定是一项非常复杂的事情，有时候也会很主观。

正如大家看到的，中国在这些杂志上发表论文的数量是很少很可怜的。像Annals of Mathematics这个杂志，建国以来所有国内学者发表了仅仅4篇，而陈省身教授一个人，一辈子在这个杂志上就发表了13篇论文。这体现出来相当巨大的差距。前文所提到的Tarence Tao，四大杂志已经早已超过十篇了。

一篇Annals of Mathematics的发表要经历非常仔细的审稿过程，有时候为一篇文章，有的顶级大学会开一个学期的讨论班。西北大学（northwestern）的夏志宏教授，年轻时候为解决N体问题，做出来的重要的数学工作，在普林斯顿就经历了这样的过程，有其他教授和学生共同为这个论文开课，一边读一边审，结果从他做出来这个问题，到在数学年刊上发表（当然也在不断改动），整个过程有数年之久。如百度词条中所描述的，

http://baike.baidu.com/view/1260218.htm

References

[1] Arthur T. Benjamin, Jennifer Quinn, Proofs That Really Count

[2] S.K.Lando, Lectures on Generating Functions.